Verteilung ordinaler Muster in EEG-Daten

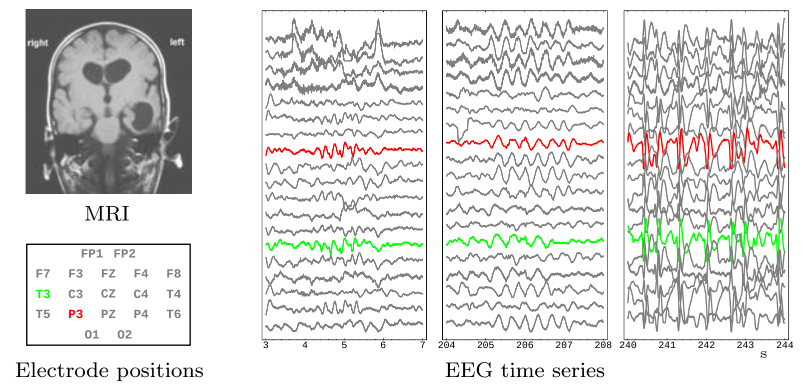
Karsten Keller
Mathieu Sinn

Institut für Mathematik
Universität zu Lübeck

GMDS-Jahrestagung 2006

Beispiel [1]

- Junge mit Verletzungen in der linken Gehirnhälfte, epileptischer Aktivität
- Ursache: konnatale Toxoplasmose der Mutter während Schwangerschaft



[1] K., Lauffer, *Int. J. Bifurcation Chaos* 13 (2003), 2657-2668

Ziele für EEG-Analyse und darüber hinaus

- einfache Methoden (für erste und/oder automatische) explorative (hochdimensionale) Datenanalyse, die
  - robust gegenüber Rauschen und (kleinen/monotonen) Skalenänderungen
  - realisierbar durch sehr schnelle und flexible Algorithmen
- Quantifikation und Visualisierung
  - zeitlicher Komplexitätsänderungen
  - zeitlicher Änderungen der Ähnlichkeit, Unähnlichkeit, Kopplung zwischen Zeitreihenkomponenten
- Identifikation, Klassifikation and Diskriminierung (von Teilen) von Zeitreihen, die mit bestimmten 'Systemzuständen' assoziiert

- 'Unterscheidung' von 'Determinismus' und 'Stochastizität'

Inhalt

1. Ordinale Zeitreihenanalyse
2. Exemplarisch: Entropieanalyse
3. Exemplarisch: Clusterung ordinaler Musterverteilungen

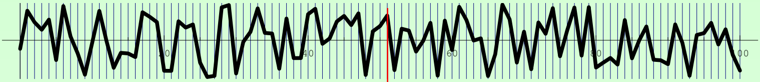
1. Ordinale Zeitreihenanalyse

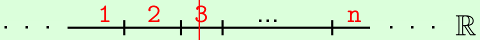
Idee der symbolischen Dynamik

original

Orbit eines (diskreten) dynamischen Systems, einer Zeitreihe

$$\ldots, x_{t-4}, x_{t-3}, x_{t-2}, x_{t-1}, x_t, x_{t+1}, x_{t+2}, x_{t+3}, x_{t+4}$$



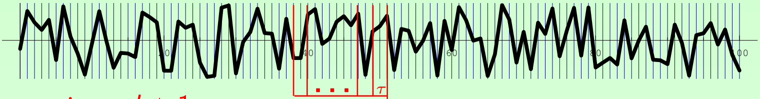


symbolisch

$$\ldots, s_{t-4}, s_{t-3}, s_{t-2}, s_{t-1}, \mathtt{s_t}, s_{t+1}, s_{t+2}, s_{t+3}, s_{t+4}$$

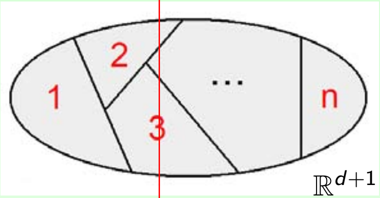
Symbolische Dynamik für Delaykoordinaten[2]

original



Dimension $d+1$

Delay τ



symbolisch

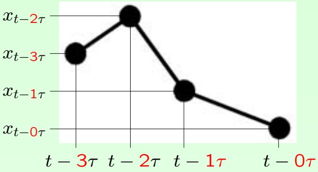
$$\ldots, s_{t-4}, s_{t-3}, s_{t-2}, s_{t-1}, \mathtt{s}_{\mathtt{t}}, s_{t+1}, s_{t+2}, s_{t+3}, s_{t+4}$$

[2] Takens, in: Dynamical Systems and Turbulence, Springer 1981

Ordinale Muster

- gegeben **Delay** $\tau \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ und **Ordnung** $d \in \{1, 2, 3, \ldots\}$
- Delaykoordinaten liefern Vektoren $(x_t, x_{t-\tau}, \ldots, x_{t-(d-1)\tau}, x_{t-d\tau}) \in \mathbb{R}^{d+1}$
- Bestimmung des 'Ordnungstyps' dieser Vektoren liefern Zerlegung des $\mathbb{R}^{d+1}$ in Mengen gleichen **ordinalen Musters** $=$ Permutation $\pi_d^\tau(t)$

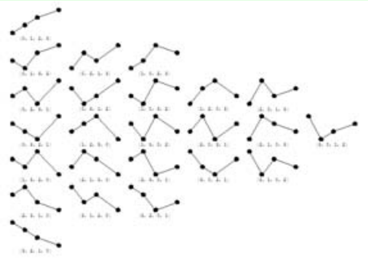
Beispiel: $(d = 3)$



$$x_{t-2\tau} > x_{t-3\tau} > x_{t-1\tau} > x_{t-0\tau}$$

$$\pi_d^\tau(t) = (2, \quad 3, \quad 1, \quad 0)$$

Analyse der Musterverteilung



- Zählen ordinaler Muster $\pi_d^\tau(t)$ in (Teil) einer Zeitreihe
- Analyse der Musterverteilung
  - Permutationsentropie[3]
  - andere Maßzahlen[4]
  - multivariate Analysemethoden[5, 6]

---

[3] Bandt, Pompe, *Phys. Rev. Lett.* 88 (2002), 174102, auch Misiurewicz 2003

[4] K., Sinn, Ordinal analysis of EEG time series, *Chaos and Complexity Letters* 2 (2006)

[5] K., Wittfeld, *Int. J. Bifurcation Chaos* 14 (2004), 693-704

[6] Groth, Visualization and detection of coupling in time series by order recurrence plots. Greifswald 2004

2. Exemplarisch: Entropieanalyse

Die Permutationsentropie

$=$ Shannon-Entropie $-\sum_{P\in\mathcal{P}_d}\mu(P)\ln\mu(P)$ für Zerlegung nach ordinalen Mustern $\mathcal{P}_d$

für eindimensionale diskrete dynamische Systeme:

- Robustheit unter dynamischem und Beobachtungsrauschen[7]
- starke 'Limes'-Beziehung zur Kolmogorov-Sinai-Entropie[8]

Theorem:
Ist f stückweise monotone Intervallabbildung and μ ein invariantes Maß für f, so ist $\lim_{d\to\infty} -\frac{1}{d}\sum_{P\in\mathcal{P}_d}\mu(P)\ln\mu(P)$ die Kolmogorov-Sinai-Entropie von f.

[7] Bandt, Pompe, *Phys. Rev. Lett.* 88 (2002)

[8] Bandt, G. Keller, Pompe, *Nonlinearity* 15 (2002), 1595-1602

Empirische Permutationsentropie (multivariater Ansatz)

- Fenstergröße δ, m Kanäle, $n = (d+1)!$ ordinale Muster

$$(h_{ij})_{i,j=1}^{m,n} = \begin{pmatrix} \textbf{relative Häufigkeit} \text{ von Kombinationen} \\ \textbf{`Kanal'} \ i \text{ and } \textbf{`Muster'} \ j \\ \text{im Zeitintervall } [t-\delta+1, t] \end{pmatrix}_{i,j=1}^{m,n}$$

$$= \begin{pmatrix} h_{11} & \dots & h_{1j} & \dots & h_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ h_{i1} & \dots & h_{ij} & \dots & h_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ h_{m1} & \dots & h_{mj} & \dots & h_{mn} \end{pmatrix} \begin{array}{ll} h_{1\cdot} = \frac{1}{m} & \text{`Kanal' 1} \\ \vdots & \\ h_{j\cdot} = \frac{1}{m} & \text{`Kanal' j} \\ \vdots & \\ h_{m\cdot} = \frac{1}{m} & \text{`Kanal' m} \end{array}$$

'totale' $\quad \mathtt{h}_{\cdot 1} \quad \dots \quad \mathtt{h}_{\cdot j} \quad \dots \quad \mathtt{h}_{\cdot n}$

- **'totale' Permutationsentropie:**

$$E_t = -\sum_{j=1}^{n} \mathtt{h}_{\cdot\mathtt{j}} \ln \mathtt{h}_{\cdot\mathtt{j}}$$

- **i-th 'Kanal'-Permutationsentropie:**

$$E_t^i = -\sum_{j=1}^{n} mh_{ij} \ln(mh_{ij})$$

- **Kontingenz:**

$$\varphi_t^2 = \sum_{i,j=1}^{m,n} \frac{(h_{ij} - h_{i\cdot}\mathtt{h}_{\cdot\mathtt{j}})^2}{h_{i\cdot}\mathtt{h}_{\cdot\mathtt{j}}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{(mh_{ij} - \mathtt{h}_{\cdot\mathtt{j}})^2}{\mathtt{h}_{\cdot\mathtt{j}}} \right)$$

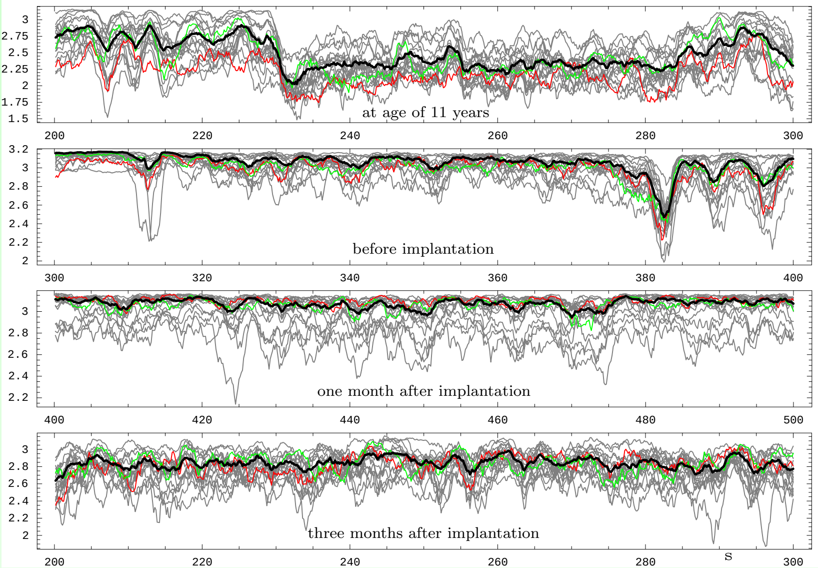
Wenn 'Kanal'-Musterverteilung nicht 'zu verschieden':

$$\boxed{E_t \approx \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} E_t^i + \frac{\varphi_t^2}{2}}$$

`'totale Kompl.'` $\approx$ `'mittlere Kompl.'` $+$ `'Inhomogenität'`

Beispiel: Vagus-Stimulation und EEG-Analyse

‘totale’ und ‘Kanal-’ Permutationsentropie, gefenstert (2 s), $d = 3$, $\tau = 4$

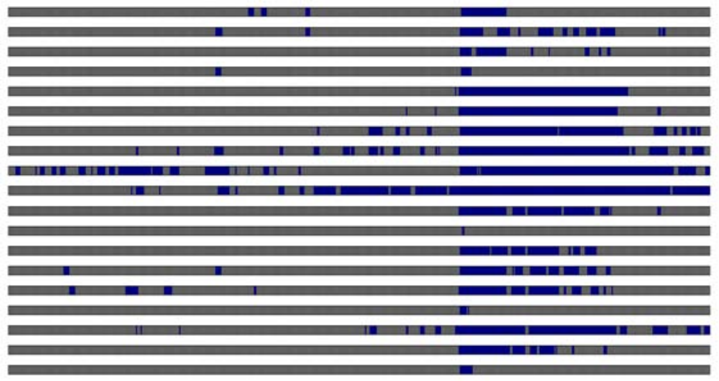


3. Exemplarisch: Clusterung ordinaler Musterverteilungen

Idee

- Zerlegung aller EEG-Komponenten (Kanäle) in Abschnitte gleicher Länge
- Bestimmung der jeweiligen ordinalen Musterverteilungen
- Clusterung bezüglich eine Abstands von Musterverteilungen

$d = 3$, $\tau = 1$, Abschnitte von 2s, Variationsabstand, Complete Linkage, 2 Cluster



Datamining

- gleichzeitige Visualisierung verschiedener EEG-Daten